15/10/2018

Διάλεξη 3η

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΓΡ.ΔΙΑΦ.ΕΞΙΣ α' τάξης:

$$a(t)y'(t)+b(t)y(t)=0,\ t\in I,\quad a(t)\neq 0,\ t\in I$$

$$\Rightarrow y'(t)+p(t)y(t)=0,\quad p(t)=\frac{b(t)}{a(t)},\ t\in I.$$

Ορισμός: Μια συνάρτηση $y\in C^1(I)$ καλείται λύση της (E_0) αν η y ικανοποιεί την εξίσωση για όλα τα $t\in I$.

Θεώρημα: Ας είναι $t_0\in I$; όλες οι λύσεις της (E_0) δίνονται από τον τύπο

$$y(t)=c\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds},\ t\in I$$

Απόδ.

Ας είναι y μια λύση της (E_0). Τότε για $t\in I$ έχουμε

$$y'(t)+p(t)y(t)=0.$$

$$\Rightarrow e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\cdot y'(t)+e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}p(t)y(t)=0,\ t\in I.$$

$$\Rightarrow \left[e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}y(t)\right]'=0,\ t\in I$$

$$\Rightarrow e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}y(t)=c$$

$$\Rightarrow y(t)=c\,e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds},\ t\in I$$

Είναι παραγ/μη και διότι ο εκθέτης είναι παραγ. ως συν. συν.

Επίσης για $c\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left[c e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\right]'=c\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\left[-\int_{t_0}^{t}p(s)ds\right]'$$

$$=y(t)(-p(t))$$

$$\Rightarrow y'(t)+p(t)\cdot y(t)=0$$

Ορισμός: Μια συνάρτηση $y \in C'(I)$ καλείται λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $(E_0)-(C_0)$ αν η y ικανοποιεί την εξίσωση για κάθε $t \in I$, και επίσ. $y(t_0)=y_0$.

Θεώρημα: Το πρόβλημα αρχ. τιμών $(E_0)-(C_0)$ έχει ακριβ. μια λύση που δίνεται από τον τύπο:

$$y(t)=y_0 \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}, \quad t \in I.$$

Απόδ

α) Για $t \in I$ έχουμε .....

$$y'(t)=y_0 \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}\,[-p(t)]$$

$$y'(t)=-p(t)y(t) \Rightarrow y \text{ λύση της } (E_0)$$

β) αν y_1, y_2 είναι 2 λύσεις του προβ. αρχ. τιμών (Π.Α.Τ) τότε για την συνάρτηση $z(t)=y_1(t)-y_2(t), \ t \in I$ έχουμε $z(t_0)=y_1(t_0)-y_2(t_0)=y_0-y_0=0$

και $$z'(t)=y_1'(t)-y_2'(t)=-p(t)y(t)+p(t)y_2(t)$$
$$=-p(t)[y_1(t)-y_2(t)]$$
$$=-p(t)z(t) \Rightarrow z'(t)+p(t)z(t)=0, \ t \in I.$$

Αποδείξαμε ότι η z είναι λύση της $z'(t)+p(t)z(t)=0$ που ικανοποιεί την: $z(t_0)=0$.

Επειδή η z είναι λύση της (E_0), θα είναι

$$z(t)=C \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}, \quad t \in I$$

για κάποιο $C \in \mathbb{R}$.

Όμως $z(t_0)=0 \Rightarrow 0=C \cdot e^{-0}, \ t \in I \Rightarrow C=0$

άρα $z(t)=0, \ t \in I$ και επίσ. $y_1(t)=y_2(t), \ t \in I$

Παρατηρήσεις:

(i) $y(t) = c \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$, $t \in I$

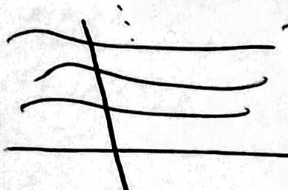
$\exists\, t_1 \in I : y(t_1) = 0 \rightarrow 0 = c e^{-\int_{t_0}^{t_1} p(s)ds} \Rightarrow \dots c = 0$ Οι λύσεις στην περίπτωση αυτή διατηρούν πρόσημο.

Ο στόχος δεν είναι μόνο η συνάρτηση αυτή!!! Διατηρεί μόνο πρόσημο!

Απόδειξη αν $\exists\, t_1 \in I$ τότε $y(t_1) = 0 \Leftrightarrow y \equiv 0$.

(ii) $\exists\, t_1 \in I : y(t_1) > 0 \Rightarrow y(t) > 0,\ \forall t \in I$
(<0)

Ερώτηση: $y(t) = c \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$, $t \in I$.
Ανάλογα με το c υπάρχουν πολλές λύσεις (ως παράλληλες θετικές), όπως:



αυτές οι δρ. παρ. ονομάζονται τροχιές.

Υπάρχουν τροχιές οι οποίες να τέμνονται; Απάντηση:

Όχι! Με βάση την εξίσωση $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$, $t \in I$ την οποία μελετάμε, οι τροχιές δεν τέμνονται!

Παράδειγμα: Εξέλιξη πληθυσμού (population g)

$\to y(t+\Delta t) - y(t) = p(t)y(t)\Delta(t)$

$[y_{n+1} - y_n = p_n \cdot y_n \cdot 1)$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = p(t)y(t)$$

$\Rightarrow y'(t) - p(t)y(t) = 0$

$$\boxed{y(t) = y_0 \cdot e^{\int_0^t p(s)ds} \quad , t \geq 0}$$

$\cdot\ p(t) = k \begin{cases} \to k>0 \\ \to k<0 \end{cases} \quad \Big| \quad y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~

π.χ. (Π.Α.Τ.)

$$y' + y\left[\frac{t^2 + \sin t + \sqrt{t+1}}{t\log(t^2+2) + t^3}\right] = 0$$

$y(0) = 0$

Η μόνη λύση είναι το $y=0$, διότι η (E_0): $y'(t)+p(t)y(t)=0$ δεν μηδενίζεται ποτέ, παρά μόνο στο 0.

~o~o~o~o~o~o~o~o~

Η ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ Σ.Δ.Ε. α' τάξης:

(E): $y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$, $p \in C(I)$, q: ολοκλ. συνάρτηση (συνεχής)

⊛ συνεχείς είναι οι λύσεις, οι λύσεις θα είναι συνεχώς παραγωγίσιμες.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $y \in C(I)$ καλείται λύση της E αν ικανοποιεί την (E), $\forall t \in I$.

Του προβλήματος (E)-(C) αν ικανοποιεί την (E) $\forall t \in I$ και $y(t_0) = y_0$.

Θεώρημα: Όλες οι λύσεις της (Ε) δίνονται από τον τύπο

$$y(t)=e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\left[c+\int_{t_0}^{t}q(s)\cdot e^{\int_{t_0}^{s}p(u)du}ds\right],\ t\in I$$

Απόδ

Ας είναι y μια λύση της (Ε) και $t_0\in I$. Τότε για $t\in I$ έχουμε $e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\left[y'(t)+p(t)y(t)\right]=q(t)\cdot e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}$

$$\left[y(t)e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\right]'=q(t)\,e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}.$$

$$\int_{t_0}^{t}\left[y(u)e^{\int_{t_0}^{u}p(s)ds}\right]'du=\int_{t_0}^{t}q(u)\,e^{\int_{t_0}^{u}p(s)ds}.$$

$$y(t)e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}-y(t_0)\cdot\cancel{e^{\int_{t_0}^{t_0}p(s)ds}}^{\,1}=\int_{t_0}^{t}q(u)e^{\int_{t_0}^{u}p(s)ds}.$$

$$y(t)=e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\left[\overbrace{y(t_0)}^{c}+\int_{t_0}^{t}q(u)\,e^{\int_{t_0}^{u}p(s)ds}du\right]$$

($\Leftarrow$ παραγωγίζω για επαλήθευση)

Πρόταση: Το πρ. αρχ. τιμών (Ε)-(C) έχει ακριβώς μια λύση η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{y(t)=e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\left[y_0+\int_{t_0}^{t}q(s)e^{\int_{t_0}^{s}p(u)du}ds\right],\ t\in I.}$$

Απόδ

α) Είναι $\left[y(t)\cdot e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\right]'=\left[y_0+\int_{t_0}^{t}q(s)e^{\int_{t_0}^{s}p(u)du}ds\right]'$.

$\Rightarrow$ $y'(t)e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}+y(t)e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\cdot p(t)=0+q(t)e^{\int_{t_0}^{t}p(u)du}$

$\Rightarrow$ $y(t)$ ικανοποιεί την (Ε).

Επίσης $y(t_0)=e^{-\cancel{\int_{t_0}^{t_0}p(s)ds}^{\,0}}\left[y_0+\cancel{\int_{t_0}^{t_0}\cdots}^{\,0}\right]$

Επομένως ο τύπος περιγράφει μια λύση της (Ε)-(C).

Αν y_1, y_2 λύσεις του Π.Α.Τ. (Ε)-(Σ) τότε για την $z(t)=y_1(t)-y_2(t)$

έχουμε $z(t_0)=y_1(t_0)-y_2(t_0)=y_0-y_0=0$

<u>Και</u> για $t\in I$:

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t)+p(t)\,y_1(t)&=q(t)\\ y_2'(t)+p(t)\,y_2(t)&=q(t)\end{aligned}\right\}\ z'(t)+p(t)z(t)=0$$

$z(t_0)=0 \Rightarrow z(t)=0\ ,\ t\in I$